$\mathbb{Q}_p$ $\longrightarrow$ résolution $\to$ monômes

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ $\longrightarrow$ $b_f(s)$

$\longrightarrow$ Théorie de modèles (généraliser)

excursion vers $\mathbb{F}_p((t))$: série de Laurent

$$0 \neq x = \sum_{i \geq l} a_i t^i \qquad a_i \in \mathbb{F}_p$$

$$\operatorname{ord}(x) = l \qquad a_l \neq 0$$

$$|x| = p^{-l}. \qquad l \in \mathbb{Z}$$

localement compacte $\longrightarrow$ mesure de Haar $|dx_1|$ sur $\mathbb{F}_p((t))$

$\underbrace{\mathbb{Z}_p}$ $\longleftrightarrow$ $\underbrace{\mathbb{F}_p[[t]]}_{\text{disque unité}} \subset \mathbb{F}_p((t))$

$$Z_{f,\mathbb{F}_p((t))}(s) = \int_{x \in \mathbb{F}_p[[t]]^n} |f(x)|^s \, |dx|$$

$\mathbb{F}_p((t))$ a caractéristique p.

rationelle en $p^{-s} = t$???

ouverte !

- résolution ✗
- $b_f(s)$ ✗ $\quad \frac{\partial}{\partial x_1} |f| = 0 \quad$ p.p.
- th. des modèles ✗

(cas spéciaux : f en ≤ 2 vars.
..., ...)

---

pourtant, pour f donné, si premier p grand

alors { th. modèles ; (Gödel)
rés. }

$$Z_{f,\mathbb{Q}_p}(s) = Z_{f,\mathbb{F}_p((t))}(s).$$

donc rationelle

---

théorie des modèles (logique premier ordre)
math.

beaucoup de liens avec des math.
algèbre, géom, analyse, th. nombres, ...

Langage : $\mathcal{L}$: $+, -, \cdot, 0, 1$

ring

structures : anneau $\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1$

géom alg : $\boxed{p_i(x_1, \ldots, x_n) \begin{array}{l} = 0 \\ \neq 0 \end{array}}$

résoud dans $\mathbb{R}^n$

$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \ldots\ldots \}$

ensemble de solution.
ensemble algébrique et

Th. modèles. $\{ X \in \mathbb{R}^n \mid \exists y_1 \; y_1^2 = p_1(x) \wedge \exists y_2 \; p_2(y_2, x) = 0 \wedge \ldots \vee (\forall z \; p(x) \neq z) \}$

ou

formule dans $\mathcal{L}_{ring}$ en vars. libre x

$p_i \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n, y, z]$

l'ensemble de solutions de la formule en $\mathbb{R}^n$

ensemble définissable.

ens. alg. X, Y $p: X \to Y$

$X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ p_i : polynômes

si X et Y sont ensembles définiss.

$X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$

$f : X \longrightarrow Y$ est definissable

ssi

le $\underbrace{\text{graph}(f)}_{\text{ensemble déf.}} \subset X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$

formule

Lemme. la composée $g \circ f$ de fonction déf f, g est déf.

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

$g \circ f$ est déf.

graph(f) — $\phi(x, y)$ formules

graph(g) — $\psi(y, z)$

graph$(g \circ f)$ — $\exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_m \underline{(\phi(x,y) \wedge \phi(y,z))}$

$\mathbb{R}^{n+n'}$

ens. déf — union finie
— intersection $\cap$
— complémentaire

$+$, $-$, $\cdot$, 0, 1, $\exists$, $\forall$, x_i

$($, $)$, $\wedge$ (et), $\vee$ (ou), $\neg$, $=$

$$\underbrace{\neg\,(p(x) = q(y))}_{p(x) \neq p(y)}$$

$f : X \to Y$ fonction déf,

alors $f(X)$ est ensemble déf,

$\mathrm{graph}(f)$ —— $\varphi(x, y)$

$f(X) \subset Y$ —— $\underbrace{\exists x_1 \dots \exists x_n \ \varphi(x, y)}_{\mathbb{R}^n}$

$X \subset R^n$ est algébrique.

$p : R^n \to R^m$ polynôme

$p(X)$ n'est pas toujours ens. alg.

(Si $R = \mathbb{C}$ alors OK.
Si $R = \mathbb{Q}$, $p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : x \mapsto x^2$

$p(\mathbb{Q}) = \{$ les carrés dans $\mathbb{Q} \}$
(pas algébrique
définissable

$\{ x \in \mathbb{Q} \mid \exists y \; y^2 = x \}$

$\mathcal{L}_{ring}$ —— $R = \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1$

Thm de Chevalley / Tarski

Les ensembles algébriques dans $\mathbb{C}^n$ sont les mêmes que les ensembles déf dans $\mathbb{C}^n$.

géom

$\bigvee_i \bigwedge_j (p_{ij}(x) = 0 \wedge \ldots q_{ij}(x) \neq 0)$

$\exists y \forall z \exists w \forall v \ldots (p(x, y, z, w, v) = 0$

équivalent ($\mathbb{C}$)
avec une formule sans quant.

$\boxed{\text{résultat de Elimination de quantificateurs (QE)}}$ cont. alg.

$X \subset \mathbb{C}^n$ alg $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$
aussi $p(X)$.

$\mathbb{R}_{+,-,\cdot,0,1}$ $\mathcal{L}_{ring}$: pas QE.

$\underbrace{\mathbb{R}_{\geq 0}}_{\text{déf}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y^{\in \mathbb{R}} (y^2 = x)\}$

$\wedge \vee \ldots \quad p(X) = 0, \neq 0$

$\mathcal{L}_{ring,<}$ avec symboles : $+, -, \cdot, 0, 1, <$

anneaux ordonnés.

$\mathbb{R}_{+,\cdot,<}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \; z \neq 0, \; z^2 + x = y\}$

déf sans quant.? $\mathcal{L}_{ring}$.

Thm Tarski : $\mathbb{R}$ admet QE dans $\mathcal{L}_{ring,<}$.

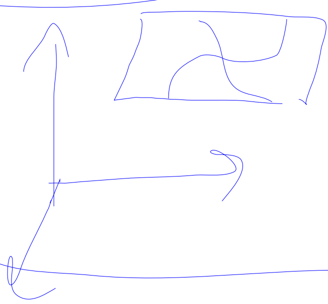
Si $X \subset \mathbb{R}^n$ est déf,

il existe une formule φ dans $\mathcal{L}_{ring,<}$ sans quanteurs

$$X = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \}$$

$$\bigvee_i \bigwedge_j P_{ij}(x) \begin{array}{l} = 0 \\ \neq 0 \\ > 0 \end{array}$$

en semi-alg.



... $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F}_p((t))$

QE?